

# Alternatief correctievoorschrift vwo wiskunde B

Cito voert regelmatig onderzoeken uit rondom de centrale eindexamens. In 2023 is een onderzoek afgerond naar een alternatieve opzet van het correctievoorschrift vwo wiskunde B. Irene van Stiphout en Ruud Stolwijk, beiden toetsdeskundigen wiskunde bij Cito, doen hierover verslag.

## Inleiding

Een correctievoorschrift (cv) van een examen natuurkunde ziet er heel anders uit dan dat van wiskunde. In het kader van meer afstemming tussen exacte vakken hebben de toetsdeskundigen van wiskunde daarom gekeken of de aanpak van natuurkunde geschikt zou kunnen zijn voor wiskunde. Wat is het verschil? De opbouw bij natuurkunde is eerst een uitkomst, daarna een voorbeeld van een antwoord, daarna worden bepaalde inzichten uit dat voorbeeld van een antwoord genoemd in een bolletjesstructuur. In het laatste bolletje komen de berekeningen aan de orde in de term 'completeren' dan wel 'completeren van de berekening'. Behalve dat er interesse was in meer afstemming, waren er nog twee redenen om te kijken naar een alternatieve opzet van het cv. We willen nog meer recht willen doen aan de essentie van de wiskundige vaardigheid van leerlingen. Dat betekent dat we leerlingen willen belonen voor hun wiskundige, en niet alleen voor hun algebraïsche en rekenkundige vaardigheden. Daarnaast was er de behoefte om een nieuwe balans te vinden tussen duidelijkheid voor docenten en een gedetailleerd cv. Figuur 1 toont een cv uit de jaren '80 waarin per onderdeel meerdere punten te verdelen zijn naar eigen inzichten van de docent. Dat is nogal een contrast met de huidige cv's waarin soms wel zes verschillende strategieën zijn uitgeschreven voor één vraag. Een nieuwe balans hierin is welkom.

3.	voor a:	6 punten;	voor de uiterste waarde:	4 punten;
	voor h:	4 punten;	voor het bereik:	2 punten;
	voor c:	5 punten;	voor de oplossing van $f(x) = 3$ :	3 punten.

figuur 1 Minimaal cv van een examen uit de jaren '80

## Een alternatief cv

De opzet van natuurkunde bleek niet helemaal te passen bij wiskunde. Het punt van completeren ligt bij wiskunde anders dan bij natuurkunde, omdat het bij wiskunde

vaak ook gaat om de berekening. Ook bleek tijdens de constructie en in gesprekken met de vaststellingscommissie dat er behoefte is om onderscheid te maken in soorten inzicht. Dit heeft geresulteerd in het volgende onderscheid.

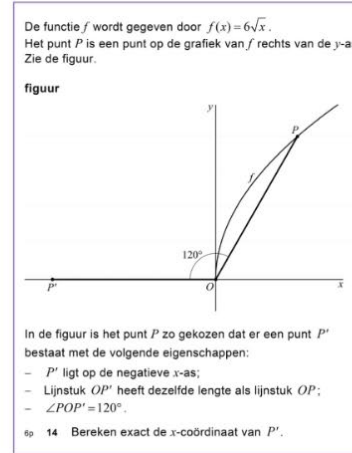
**Inzicht dat:** in de betreffende stap ('cv-bolletje') moet duidelijk zijn dat de leerling over het betreffende inzicht beschikt heeft; een concrete of correcte berekening hoeft niet aangetroffen te worden.

**Inzicht hoe:** in de betreffende stap ('cv-bolletje') moet duidelijk zijn dat de leerling over het betreffende inzicht beschikt heeft; de essentiële berekeningsstappen dienen wel aanwezig te zijn.

**Completeren:** het in detail uitwerken van berekeningen. Hierbij moet worden opgemerkt dat *inzicht hoe* en *completeren* met elkaar verweven kunnen zijn. Ook hebben we gezien dat deze omschrijvingen nog verdere afbakening behoeven. Omdat wiskunde meer nog dan natuurkunde op algebraïsch/rekenkundige/technische handelingen gebaseerd is, ontkomen we er niet aan om meer nadruk op deze aspecten te leggen dan bij de natuurkundeaanpak gangbaar is.

Na wat vingeroefeningen binnen Cito en overleg met het veld op de Nationale Wiskundedagen van 2019 en 2020 is, in samenwerking met de vaststellingscommissie van wiskunde B van het College voor Toetsen en Examen (CvTE) en de constructiegroep van wiskunde B, een alternatief cv gemaakt voor het examen vwo wiskunde B 2021-1. Een logische vervolgstap was om leerlingenwerk te beoordelen met dit alternatieve cv en te onderzoeken in hoeverre dit verschillen oplevert met het reguliere cv. In juni 2021 zijn van 99 leerlingen van vier verschillende scholen uitwerkingen verzameld van dit examen. Deze leerlingwerken zijn nagekeken door de eigen leraar volgens het reguliere cv en door twee verschillende correc-

toren volgens het alternatieve cv. Om praktische redenen zijn de scores volgens het alternatieve cv van beide correctoren gemiddeld. Als eerste is gekeken naar correlaties tussen de totaalscores via beide cv's. Deze bleek (niet onverwacht) hoog: de correlatie tussen de totaalscores van leerlingen volgens het reguliere cv en de gemiddelde score op het alternatieve cv is 0,97. Vervolgens is gekeken naar de verschillen in totaalscores. De 99 leerlingen hebben volgens het reguliere cv gezamenlijk 4317 scorepunten behaald en 4411 volgens het alternatieve cv, een verschil van 94 punten. Gemiddeld gesproken is de totaalscore per leerling dus ongeveer één scorepunt hoger volgens het alternatieve cv. Daarna is geanalyseerd aan welke factoren eventuele verschillen in totaalscores zijn toe te schrijven. Uit het onderzoek kwamen, naast enkele onjuistheden in de beoordeling, twee factoren naar voren. Ten eerste zien we een verschil in scores als gevolg van een juiste aanpak, maar een slordige of onjuiste uitvoering, waar in het reguliere cv minder mogelijkheden liggen om daar punten voor te geven dan in het alternatieve cv. Ten tweede zien we dat de andere opzet van het alternatieve cv een accentverschuiving geeft ten aanzien van bepaalde onderdelen in de uitwerking, hetgeen leidt tot verschillen in de beoordeling. We lichten dit toe aan de hand van twee voorbeelden.



figuur 2 Vraag 14 vwo wiskunde B 2021-1

stap in de uitwerking reguliere cv	beoordeling volgens reguliere cv	stap in de uitwerking alternatieve cv	beoordeling volgens alternatieve cv
De lijn door $O$ en $P$ heeft hellingshoek $(180 - 120 =) 60^\circ$	0 hellingshoek staat er niet	het inzicht dat een vergelijking van de lijn door $O$ en $P$ moet worden bepaald	1 inzicht dat die vergelijking moet worden bepaald is er (al is de uitvoering onjuist)
De richtingscoëfficiënt van deze lijn is dus $\sqrt{3}$	0 richtingscoëfficiënt is fout	het inzicht hoe de hellingshoek (of de richtingscoëfficiënt) van de lijn door $O$ en $P$ kan worden	0 uitvoering is onjuist en niet onderbouwd
Voor de $x$ -coördinaat van $P$ geldt $\sqrt{3} \cdot x = 6\sqrt{x}$	0 vergelijking is onjuist	het inzicht dat punt $P$ het snijpunt is van deze lijn met de grafiek van $f$	1 inzicht is er want er wordt een vergelijking opgesteld
Een exacte berekening waaruit volgt $x = 12$ ( $x = 0$ voldoet niet)	0 foute vergelijking (is wel juist opgelost)	het inzicht hoe de hieruit volgende vergelijking exact kan worden opgelost	1 hoewel de vergelijking onjuist is, wordt deze wel juist opgelost
Dus $P(12, 6\sqrt{12})$ , dus $OP = 24$	0 onjuist	het inzicht hoe de lengte van $OP$ kan worden berekend	0 de lengte van $OP$ wordt niet berekend
Dus $x_{P'} = -24$	0 onjuist	completeren en het juiste antwoord	0 verdere berekening is onjuist dus 0 voor completeren
<b>Totaalscore</b>	<b>0</b>		<b>3</b>

tabel 1 Score van leerlingwerk vraag 14 volgens beide cv's

### Voorbeeld van een uitwerking van een leerling

Als eerste kijken we naar een uitwerking van een leerling van vraag 14, zie figuur 2 op pag. 9.

In figuur 3 staat de uitwerking van een leerling waarvoor 0 punten zijn gegeven volgens het reguliere cv. Reden hiervoor is waarschijnlijk dat er in iedere stap in de uitwerking iets mis gaat.

In tabel 1 wordt deze correctie vergeleken met het alternatieve cv.

figuur 3 Uitwerking van een leerling van vraag 14

Dit voorbeeld laat zien dat een andere insteek van het cv andere scores oplevert. De vraag is welke van deze twee het meest recht doet aan de vaardigheid van de leerling. Die afweging laten we graag aan de lezer over.

### Voorbeeld van accentverschuiving in cv

De tweede vraag die het verschil in scores verklaart tussen het reguliere en alternatieve cv is de accentverschuiving in het alternatieve cv. We illustreren dit aan de hand van vraag 12.

Hierin gaat het over de functie  $f_p(x) = \frac{x^3 + 4p}{x^2}$  die is gedefinieerd voor  $p > 0$  en waarvan de leerlingen moeten bewijzen dat er een lijn is waarop de toppen liggen van  $f_p$ . Het maximum aantal te behalen scorepunten is 5. De beste correctievoorschriften staan in figuur 4 en figuur 5.

In tabel 2 staan de verschillende stappen in de uitwerking beschreven en het aantal scorepunten dat aan die stappen wordt toegekend in beide cvs. Hierbij hebben we ons voor het reguliere cv gebaseerd op het eerste antwoord-alternatief. Voor het bepalen van de afgeleide met de quotiëntregel worden in het reguliere cv twee scorepunten toegekend omdat het veel rekenwerk is, in het alternatieve cv is dat een scorepunt. Het gelijkstellen aan 0 levert in

12 maximumscore 5	
• Er geldt $f_p'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - (x^3 + 4p) \cdot 2x}{(x^2)^2}$	1
• Herleiden tot $f_p'(x) = 1 - \frac{8p}{x^2}$ (of $f_p'(x) = \frac{x^2 - 8p}{x^2}$ )	1
• $f_p'(x) = 0$ geeft voor de x-coördinaat van de top $p = \frac{1}{4}x^2$	1
• Invullen in $x^3 + 4p$ geeft $1\frac{1}{2}x^3$	1
• Dus de y-coördinaat van de top is $\frac{1\frac{1}{2}x^3}{x^2} = 1\frac{1}{2}x$ (dus de toppen liggen op de lijn met vergelijking $y = 1\frac{1}{2}x$ )	1
of	
• Er geldt $f_p(x) = x + \frac{4p}{x^2} = x + 4px^{-2}$	1
• $f_p'(x) = 1 - \frac{8p}{x^3}$	1
• $f_p'(x) = 0$ geeft voor de x-coördinaat van de top $x = \sqrt[3]{8p} (=2p^{\frac{1}{3}})$	1
• Invullen in $x^3 + 4p$ geeft $12p$ en invullen in $x^2$ geeft $(2p^{\frac{1}{3}})^2 = 4p^{\frac{2}{3}}$ , dus de y-coördinaat van de top is $\frac{12p}{4p^{\frac{2}{3}}} = 3p^{\frac{1}{3}}$	1
• (Voor elke waarde van $p > 0$ geldt) $\frac{3p^{\frac{1}{3}}}{2p^{\frac{2}{3}}} = 1\frac{1}{2}$ (of $3p^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{2} \cdot 2p^{\frac{2}{3}}$ ) (dus de toppen liggen op de lijn met vergelijking $y = 1\frac{1}{2}x$ )	1

figuur 4 cv vraag 12 vwa wiskunde B 2021-1

12 maximumscore 5	
voorbeeld van een antwoord:	
$f_p'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x(x^3 + 4p)}{x^4} (= \frac{x^3 - 8p}{x^2})$	
$f_p'(x) = 0$ als $x^3 = 8p$ dus $p = \frac{1}{8}x^3$	
de kromme waarop de toppen liggen heeft vergelijking $y = \frac{x^3 + 4 \cdot \frac{1}{8}x^3}{x^2}$	
herleiden tot $y = 1\frac{1}{2}x$ (dus de toppen liggen op een rechte lijn)	
• het inzicht hoe de afgeleide van $f_p$ kan worden gevonden	1
• het inzicht dat de afgeleide van $f_p$ gelijk moet worden gesteld aan nul	1
• het inzicht dat vervolgens $p$ kan worden uitgedrukt in $x$	1
• het inzicht dat vervolgens $y$ kan worden uitgedrukt in $x$	1
• completeren en de conclusie	1

figuur 5 Alternatieve cv vraag 12 vwa wiskunde B 2021-1

het alternatieve cv expliciet een scorepunt op terwijl dat in het reguliere cv in een bolletje zit samen met het oplossen van de vergelijking die daaruit ontstaat. Het invullen van  $p$  in  $f$  levert in het reguliere cv twee scorepunten op en in het alternatieve cv een. Het trekken van een conclusie hoeft in het reguliere cv niet expliciet te gebeuren, in het alternatieve cv wel.

stap in de uitwerking	aantal punten in reguliere cv	aantal punten in alternatieve cv
het bepalen van de afgeleide	2	1
de afgeleide 0 stellen	1	1
vergelijking oplossen		1
$p$ invullen in $f$	2	1
conclusie trekken	(alleen impliciet)	1
Totaalscore	5	5

tabel 2 verschillen in scorepunten tussen het reguliere cv en het alternatieve cv

Dit voorbeeld laat zien dat denken over een uitwerking vanuit wiskundige inzichten die daarin een rol spelen tot een andere verdeling van de scorepunten kan leiden. Het inzicht dat de afgeleide gelijk moet worden gesteld aan 0 is een belangrijk inzicht, maar als rekenstap niet heel interessant. De wiskundige inzichten als uitgangspunt nemen zorgt dat er een ander onderscheid wordt gemaakt in herkenbare stappen in de uitwerking. Ook hierbij is de vraag welke indeling het meest recht doet aan de (wiskundige) vaardigheid van de leerling. En ook deze afweging laten we aan de lezer.

### Conclusie

De verkenning van een alternatieve opzet van het cv had, zoals in de inleiding betoogd, verschillende redenen. Als eerste wilden we meer afstemming met andere exacte vakken als natuur- en scheikunde. Het alternatieve cv sluit aan bij wat daar gebruikelijk is. In onze ogen is dit winst. Een tweede reden was de wens om nog meer recht te willen doen aan de essentie van de wiskundige vaardigheid van leerlingen. We beseffen dat dit een heikel punt is waar de meningen flink over kunnen verschillen. Want wat is precies die essentie en hoe bepaal je dat dan? In onze ogen brengt het alternatieve cv, meer dan het regulier cv, in beeld waar de vraag in de kern over gaat en worden leerlingen daarvoor naventant beloond.

De focus op relevante denkstappen in de uitwerking zou kunnen bijdragen aan het voorkomen van een punten-inflatie. Hiermee bedoelen we het niet toekennen van scorepunten voor onderdelen van een uitwerking omdat het om een kleine rekenstap gaat, zoals het gelijk stellen aan 0 van de afgeleide. Een derde reden was de behoefte om een nieuwe balans te vinden tussen duidelijkheid voor docenten en een

gedetailleerd correctievoorschrift. Dit onderzoek geeft geen antwoord op de vraag in hoeverre dit is gelukt. Tijdens het corrigeren met het alternatieve cv werd duidelijk dat hierin nog uitzoekwerk ligt. Zo is het verschil tussen *inzicht dat* en *inzicht hoe* nog niet duidelijk genoeg. De intentie was om het correct oplossen onder *inzicht hoe* te laten vallen. Maar hoe ga je dan om met kleine beschrijvingen? Waar vallen die onder? Vraagt dat om een extra 'spelregel', bijvoorbeeld een vakspecifieke regel?

### Tot slot

Op het moment van schrijven (juli 2023) is niet duidelijk of, en zo ja hoe, de alternatieve aanpak een vervolg krijgt. Het is aan de vaststellingscommissies van de CvTE om hierover een besluit te nemen. Intussen zijn we zeer geïnteresseerd in de mening van de lezer. We nodigen je dan ook van harte uit jouw mening per mail met ons te delen.

Het alternatieve cv (alsmede het reguliere cv en het examen zelf) is te vinden op de site:

[vakbladeuclides.nl/992alternatief\\_cv](https://vakbladeuclides.nl/992alternatief_cv)

### Over de auteurs

Irene van Stiphout en Raud Stolwijk zijn toetsdeskundigen bij Cito. E-mailadressen: [irene.vanstiphout@cito.nl](mailto:irene.vanstiphout@cito.nl), [raud.stolwijk@cito.nl](mailto:raud.stolwijk@cito.nl).